XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 14 октября 2008.

Третий тур. Лига стратегий

1. Для данного простого числа p последовательность a_k определяется следующими условиями: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k$. Найдите все p, при которых в этой последовательности встретится число -1.

2. В графе 2008 вершин, и среди любых 144 вершин найдутся две, соединенные ребром. Докажите, что можно найти в этом графе 15 вершин и пронумеровать их числами от 1 до 15 так, что при всяком k от 2 до 15 вершина с номером k соединена с вершиной с номером $[k/2]$.

3. Два игрока играют в такую игру: изначально на доске написано число 2. Игрок своим ходом может взять два уже написанных числа (можно брать одно и то же дважды) и выписывает на доску либо сумму, либо произведение взятых чисел, не совпадающие с уже написанными. Все выписываемые числа должны быть меньше чем 1757. Выигрывает тот, кто первым выпишет на доску число 1756. Кто выиграет при правильной игре: начинающий, или его соперник?

4. Вписанный четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{CP} = \frac{AI^2}{CI^2}$.

5. Назовем два положительных числа a и b похожими, если для бесконечно многих натуральных n числа $[10^n a]$ и $[10^n b]$ оканчиваются на одинаковую цифру (иными словами, в десятичной записи чисел a и b в бесконечном количестве разрядов одинаковые цифры). Докажите, что все положительные рациональные числа можно так покрасить в 10 цветов, что любые два одноцветных числа похожи.

6. Найдите все такие натуральные n, что $n! + 8$ делится на $2n + 1$.

7. На плоскости дан выпуклый многоугольник. Назовем его вершину A *хорошей*, если точка, симметричная вершине A относительно середины диагонали, соединяющей две соседние с A вершины, принадлежит многоугольнику (возможно, его границе). Какое наименьшее количество хороших вершин может быть у выпуклого стоугольника?

8. Функция $f(x, y, z)$ от трех вещественных переменных при всех вещественных a, b, c, d и e удовлетворяет условию

$$f(a, b, c) + f(b, c, d) + f(c, d, e) + f(d, e, a) + f(e, a, b) = a + b + c + d + e.$$

Докажите, что для произвольных вещественных чисел x_1, x_2, …, x_n ($n \geqslant 5$) справедливо равенство

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_4) + \ldots + f(x_n, x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

9. Докажите, что найдется ненулевой кратный $(x-1)^n$ многочлен степени n^2 с целыми коэффициентами, модули которых не превосходят n^2.

10. На плоскости даны треугольник ABC, вписанный в окружность радиуса R, и точка P. Докажите неравенство

$$\frac{AP}{BC^2} + \frac{BP}{AC^2} + \frac{CP}{AB^2} \geqslant \frac{1}{R}.$$

XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 14 октября 2008.

Третий тур. Лига стратегий

1. Для данного простого числа p последовательность a_k определяется следующими условиями: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k$. Найдите все p, при которых в этой последовательности встретится число -1.

2. В графе 2008 вершин, и среди любых 144 вершин найдутся две, соединенные ребром. Докажите, что можно найти в этом графе 15 вершин и пронумеровать их числами от 1 до 15 так, что при всяком k от 2 до 15 вершина с номером k соединена с вершиной с номером $[k/2]$.

3. Два игрока играют в такую игру: изначально на доске написано число 2. Игрок своим ходом может взять два уже написанных числа (можно брать одно и то же дважды) и выписывает на доску либо сумму, либо произведение взятых чисел, не совпадающие с уже написанными. Все выписываемые числа должны быть меньше чем 1757. Выигрывает тот, кто первым выпишет на доску число 1756. Кто выиграет при правильной игре: начинающий, или его соперник?

4. Вписанный четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{CP} = \frac{AI^2}{CI^2}$.

5. Назовем два положительных числа a и b похожими, если для бесконечно многих натуральных n числа $[10^n a]$ и $[10^n b]$ оканчиваются на одинаковую цифру (иными словами, в десятичной записи чисел a и b в бесконечном количестве разрядов одинаковые цифры). Докажите, что все положительные рациональные числа можно так покрасить в 10 цветов, что любые два одноцветных числа похожи.

6. Найдите все такие натуральные n, что $n! + 8$ делится на $2n + 1$.

7. На плоскости дан выпуклый многоугольник. Назовем его вершину A *хорошей*, если точка, симметричная вершине A относительно середины диагонали, соединяющей две соседние с A вершины, принадлежит многоугольнику (возможно, его границе). Какое наименьшее количество хороших вершин может быть у выпуклого стоугольника?

8. Функция $f(x, y, z)$ от трех вещественных переменных при всех вещественных a, b, c, d и e удовлетворяет условию

$$f(a, b, c) + f(b, c, d) + f(c, d, e) + f(d, e, a) + f(e, a, b) = a + b + c + d + e.$$

Докажите, что для произвольных вещественных чисел x_1, x_2, …, x_n ($n \geqslant 5$) справедливо равенство

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_4) + \ldots + f(x_n, x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

9. Докажите, что найдется ненулевой кратный $(x-1)^n$ многочлен степени n^2 с целыми коэффициентами, модули которых не превосходят n^2.

10. На плоскости даны треугольник ABC, вписанный в окружность радиуса R, и точка P. Докажите неравенство

$$\frac{AP}{BC^2} + \frac{BP}{AC^2} + \frac{CP}{AB^2} \geqslant \frac{1}{R}.$$